Un contributo al dibattito tra TIR e VAN

Erio Castagnoli[1], Gino Favero[2]

[1] Accademia Nazionale Virgiliana, Mantova e
Dipartimento di Scienze delle Decisioni, Università commerciale “Luigi Bocconi”;
[2] Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali, Università di Parma

T.D.5, Parma
1 giugno 2023

Indice

- **Definizioni** (per quel che servono)
  TIR e VAN sono ben noti, il punto è concordare nomi e notazioni
- **Pro e contro** dei due criteri
  Il dibattito è decisamente stagionato; ci limiteremo a (ri)vedere alcune delle obiezioni più classiche
- Una (o qualche) **proposta** conciliativa
  «Buddha, Jobu. Jobu, Buddha. Non voglio disarmonie tra voi due.»
- (Nuove?) **interpretazioni del TIR**
  Oltre alla classica interpretazione come "costo" o "rendimento", il TIR è una misura di sensibilità. Cenni: condizione di decomponibilità / rappresentazione

Definizioni: notazione

Un **progetto** (o *operazione*, o *transazione*) è un vettore di n flussi di denaro a_0, $a_1, \ldots, a_n$ alle scadenze $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$.

t_0	t_1	t_2	$\cdots$	t_{n-1}	t_n
a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n

(entrate > 0, uscite < 0, tempo misurato in anni).

Il *flusso di cassa scontato* del progetto è la funzione

$$\text{FCS} : (-1, +\infty) \to \mathbb{R} , \quad \text{FCS}(i) := \sum_{k=0}^{n} a_k (1+i)^{t_0 - t_k} .$$

- Se è riconosciuto un tasso r di riferimento, $\text{FCS}(r)$ è chiamato il **valore attuale netto** VAN del progetto.
- Qualsiasi tasso i^* di interesse tale che $\text{FCS}(i^*) = 0$ è detto **tasso interno (di rendimento)** TIR del progetto.

Definizioni: il costo di opportunità del capitale

Una scelta consueta e naturale per il "tasso di riferimento" è il **costo di opportunità del capitale** COC:

- per gli **investmenti**, il COC è il tasso ottenuto da investimenti alternativi (consueti);
- per i **prestiti**, il COC è il tasso di altre forme di finanziamento, oppure il tasso di rendimento al quale si può reinvestire il capitale preso a prestito.

Un(')agente calcola il VAN al suo COC: $\text{VAN} = \text{FCS}(\text{COC})$. Analogamente, la stessa agente sarà portata a confrontare il TIR di un progetto con il suo COC.

In breve: *il* COC *è importante sia per il* TIR *sia per il* VAN. Meglio ancora: per essere davvero significativi per l'agente, TIR e VAN devono essere confrontati con il COC.

Definizioni: il "conto di appoggio"

Interpretazione classica: consideriamo un **conto bancario** di appoggio, dove gli importi (sia > 0, sia < 0) generano **interessi** al tasso annuale composto i_{B}. Si immagina di depositare nel / prelevare dal conto ogni importo generato / richiesto dal progetto.

Se $i_{\mathrm{B}} = r$ (il tasso di riferimento), il VAN del progetto è pari al **valore atteso al tempo t_0 del saldo finale** del conto al tempo t_n (o qualsiasi $t > t_n$).

Il tasso i^* è un TIR del progetto se **il saldo finale del conto è nullo** ogni volta che $i_{\mathrm{B}} = i^*$.

Commento "classico" e obbligatorio: questa impostazione richiede che tutti i "movimenti collaterali di denaro" possano essere investiti o finanziati allo **stesso tasso i_{B} di interesse** (ne riparleremo).

Il dibattito: qualche considerazione per cominciare

Nota posizione: il VAN richiede una “scelta **soggettiva**”, il TIR è “**oggettivo**”.

Altrettanto nota: in diversi casi (sensati) **il TIR non è unico**, anche se lo è in parecchi casi (significativi).

Esempio (Lorie e Savage, 1956). Una pompa di petrolio darà 10 000\$ l’anno nei prossimi due anni. Con 1600\$ di spesa per un macchinario, è possibile anticipare l’incasso al primo anno. Il progetto differenziale

0	1	2
−1600	10 000	−10 000

ha due TTIIR: 25% e 400%.

(Sì, 1956: il dibattito prosegue da un po’ di tempo. Dorfman, 1981, lo fa risalire a Fischer, 1907, e a von Böhm-Bawerk, 1889.)

Il dibattito: altri comportamenti strani del TIR

L'esempio di Lorie e Savage (1956) è un **progetto differenziale**: se un'agente è in possesso di a e valuta di passare a b, valuterà il progetto $b-a$. I progetti differenziali hanno spesso TTIIR multipli.

Quando si considerano le **tasse**, ci sono uscite sia all'inizio sia alla fine di ogni investimento. Perciò, il FCS è negativo sia per $i \to +\infty$ ($\to a_0$) sia per $i \to -1^+$ ($\to \frac{a_n}{(1+i)^{t_n-t_0}} \to -\infty$). Perciò, i TTIIR vengono sempre a coppie.

Menzione obbligatoria per l'**effetto leva**: se è possibile finanziarsi a un tasso minore di i^*, il ROE aumenta. Ma perché guadagnare il 34% su 50\$ dovrebbe essere "meglio" che guadagnare il 22% su 100\$? Che cosa succede dei 50\$ che restano? (Probabilmente il COC...).

Fenomeni simili si presentano quando si confrontano progetti con diversi **costi iniziali** o **orizzonti temporali** diversi.

Il dibattito: peggio della mancata unicità del TIR

"Se è unico, il TIR ha un **significato finanziario chiaro**". Ah, sì?

Esempio (Castagnoli, 1986). Si compra un'auto per affittarla. I pagamenti sono 100\$ subito per spese di contratto, 4000\$ dopo quattro mesi e 18650\$ dopo un anno. Il noleggio frutta 1000\$ il mese per due anni. Profitto: $24000 - 22750 = 1250$\$. L'equazione del TIR

$$1000 a_{\overline{24}|i_{1/12}} - 100 - 4000(1 + i_{1/12})^{-4} - 18650(1 + i_{1/12})^{-12} = 0$$

ammette come **unica soluzione** il tasso annuale $i^* \simeq 304550000000000\%$.

Perché? C'è un elevatissimo **TIR "locale"**.

Altra questione ben nota: il TIR può essere piuttosto "instabile".

Esempio (segue).

- Se i 100\$ iniziali sono pagati con il costo finale, **non c'è TIR**.
- Se i 18650\$ diventano 18700\$, ci sono **tre TTIIR**: 76,25%, 114,34% e $304{,}55 \cdot 10^{12}\%$.
- Se, inoltre, 50\$ del costo iniziale sono aggiunti ai 18700 e i 4000\$ sono anticipati di due mesi, ci sono **cinque TTIIR**: 42,53%, 745,36%, 21518%, 33608805%, e $38{,}588 \cdot 10^{15}\%$.

La considerazione chiave: progetti differenziali (1)

Sistematizziamo il concetto di "progetto differenziale". Dati

$$\begin{array}{c|c|c|c} t_0 & t_1 & \cdots & t_n \\ \hline a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{c|c|c|c} t_0 & t_1 & \cdots & t_n \\ \hline b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{array},$$

cerchiamo di "compensare" a per "trasformarlo" in b.

Esempio (investimenti semplici). Consideriamo

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -a_0 < 0 & a_1 > 0 \end{array} \quad \left(i_a^* = \frac{a_1 - a_0}{a_0}\right) \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -b_0 < -a_0 & b_1 > a_1 \end{array} \quad \left(i_b^* = \frac{b_1 - b_0}{b_0}\right).$$

Confrontiamoli "trasformando" a in b. Investiamo al tempo $t = 0$ la somma aggiuntiva $b_0 - a_0 > 0$, per ottenere $(b_0 - a_0)(1 + i)$ in $t = 1$. La "trasformazione" è più conveniente di b se $a_1 + (b_0 - a_0)(1 + i) > b_1$, che è equivalente a $1 + i > \frac{b_1 - a_1}{b_0 - a_0}$.

Analogamente, per trasformare b in a si prende a prestito $b_0 - a_0$ al tempo $t = 0$, ripagando $(b_0 - a_0)(1 + j)$ al tempo $t = 1$ (con $i < j$). Così, b è più conveniente di a se $b_1 - (b_0 - a_0)(1 + j) > a_1$, cioè $1 + j < \frac{b_1 - a_1}{b_0 - a_0}$.

La considerazione chiave: progetti differenziali (2)

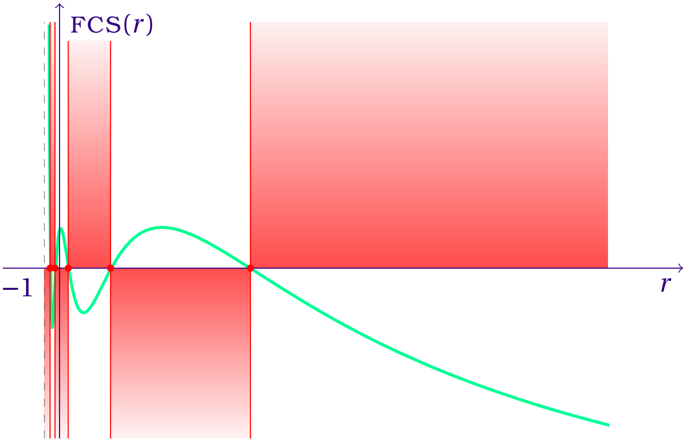
Esempio (segue). Nota: $\frac{b_1-a_1}{b_0-a_0}=1+i_d^*$ è il TIR del progetto differenziale $d=b-a$). Perciò:

- Se $i>i_d^*$, (la somma b_0-a_0 può essere investita a un tasso maggiore di i_d^* e quindi) $a\succ b$: entrambe le "transformazioni" portano a preferire a a b ($j>i$!);
- Se $j<i_d^*$, (il prestito di b_0-a_0 costa meno del rendimento di d, quindi) $b\succ a$;
- Se $i<i_d^*<j$, la situazione è ambigua: se l'agente ha a, lo considera peggiore di b (che darebbe un maggior rendimento per b_0-a_0), ma se ha b, lo considera peggiore di a (che ridurrebbe il COC $j(b_0-a_0)$).

È chiaro che la situazione è generale: se i e j stanno "dalla stessa parte" dell'unico i_d^*, entrambe le trasformazioni porteranno a scegliere lo stesso progetto. Ma che cosa succede se d ha diversi TTIIR?

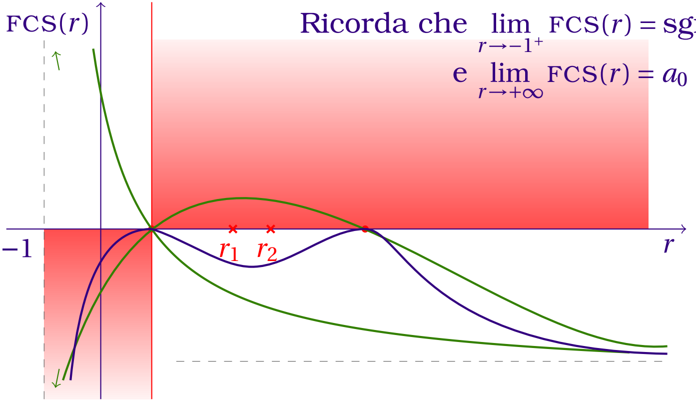
Proposta: i TTIIR come "punti caldi" del FCS (1)

Che significato possono avere **cinque TTIIR**?



Sono cinque possibili punti di **cambiamento del segno** del FCS! (Naturalmente, dipende dalla molteplicità.)

Proposta: i TTIIR come "punti caldi" del FCS (2)



Ricorda che $\lim_{r \to -1^+} \text{FCS}(r) = \text{sgn}(a_n) \cdot \infty$

e $\lim_{r \to +\infty} \text{FCS}(r) = a_0$

Se il TIR è unico, l'interpretazione è cristallina. Ma già per due...

In ogni caso: se due agenti hanno i loro CCOC **nello stesso intervallo**, allora **concorderanno** sulla redditività del progetto.

Proposta: "transformazioni" e TTIIR multipli

Ricorda: "trasformare" un progetto in un altro significa reinvestire, o prendere a prestito, le differenze tra i flussi di cassa. Avevamo trovato che la preferenza non è ambigua se il tasso i "attivo" e il tasso j "passivo" stanno **dalla stessa parte** dell'unico TIR i_d^*.

La generalizzazione è immediata: se ci sono diversi TTIIR, la semiretta $[-1, +\infty)$ è suddivisa in più di due "intervalli" e la scelta non è ambigua se i e j **appartengono allo stesso intervallo**.

Naturalmente, resta una condizione sufficiente e non necessaria.

Insomma: con questa proposta, non è più necessario attribuire al TIR un significato finanziario "autonomo" di costo o di rendimento: il suo significato è espresso in funzione del COC. Il vantaggio è che questa interpretazione è perfettamente compatibile con valori multipli o "selvaggi" del TIR.

Proposta: il VFN

In generale, è possibile costruire un modello nel quale **il tasso operativo dipenda dalle somme** in gioco ("costo di opportunità del capitale dipendente dall'importo").

La soluzione è tuttavia chiara (e in buona parte già nota, basta pensare ai classici problemi di "immunizzazione"): oltre al suo COC (o ai suoi CCOC), l'agente deve considerare il suo **orizzonte temporale** (o le sue "esposizioni").

Tutte le entrate devono essere riferite all'orizzonte temporale (capitalizzate o attualizzate) usando i tassi opportuni in base agli importi in gioco: in questo modo, si ottiene il **valore finale netto** dell'operazione, che ne costituisce l'indice naturale di redditività come e meglio del "solito" VAN.

Anche il VFN è "compatibile" con quanto detto finora: se *tutti* i tassi si trovano nello stesso "intervallo", è in qualche modo prevedibile se l'operazione sarà (s)vantaggiosa.

Interpretazione: TIR e sensibilità (1)

Ricorda: $\text{FCS}(i) = a_0 + a_1(1+i)^{t_0-t_1} + \cdots + a_n(1+i)^{t_0-t_n}$, quindi un TIR i^* è la radice di un'equazione polinomiale:

$$\text{FCF} = P(a_0, a_1, \ldots, a_n; x) := a_0(1+x)^{t_n-t_0} + \cdots + a_k(1+x)^{t_n-t_k} + \cdots + a_n = 0.$$

Considera $P(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n; x)$. Se i^* ha molteplicità 1 (cioè $\frac{\partial P}{\partial x}(a_0, a_1, \ldots, a_n; i^*) \neq 0$), l'equazione $P = 0$ **definisce implicitamente** $x(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ in un intorno di $(a_0, a_1, \ldots, a_n; i^*)$. Allora,

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_s}(a_0, a_1, \ldots, a_n; i^*) = -\frac{P'_{\alpha_s}(a_0, a_1, \ldots, a_n; i^*)}{P'_x(a_0, a_1, \ldots, a_n; i^*)} = -\frac{(1+i^*)^{t_n-t_s}}{\text{FCF}'(i^*)}.$$

Ciò misura la **sensibilità di i^* alle variazioni degli importi**: minore è $\text{FCF}'(i^*)$, e maggiore è $(1+i^*)^{t_n-t_s}$, maggiore è la sensibilità di i^*. Se $a_s \to a_s + h$,

$$i^* \to i^* - \frac{(1+i^*)^{t_n-t_s}}{\text{FCF}'(i^*)} \cdot h + o(h).$$

Naturalente, se i^* ha **molteplicità** $\geqslant 2$, il Teorema di Dini non vale più.

Interpretazione: TIR e sensibilità (2)

Esempio Investimento di 320€ in $t = 0$ per 408€ in $t = 1$. In $t = 2$, tasse per 10€.

I TTIIR del progetto zono gli zeri di

$$P(a_0, a_1, a_2; x) = -320(1+x)^2 + 408(1+x) - 10 \quad (a_0 = -320,\ a_1 = 408,\ a_2 = -10),$$

cioè $i_1^* = -97{,}5\%$ e $i_2^* = 25\%$. Nota che $\text{FCF}'(x) = -640(1+x) + 408$.

La sensibilità dei TTIIR rispetto a α_0 e α_2 sono

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_0}(a_0, a_1, a_2; i_1^*) = -\frac{(1+i_1^*)^2}{-640(1+i_1^*)+408} = -\frac{0{,}025^2}{392} \simeq -0{,}000\,001\,595\ ,$$
$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_2}(a_0, a_1, a_2; i_1^*) = -\frac{1}{-640(1+i_1^*)+408} = -\frac{1}{392} \simeq -0{,}002\,551\ ;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_0}(a_0, a_1, a_2; i_2^*) = -\frac{(1+i_2^*)^2}{-640(1+i_2^*)+408} = -\frac{1.25^2}{-392} \simeq -0{,}003\,986\ ;$$
$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_2}(a_0, a_1, a_2; i_2^*) = -\frac{1}{-640(1+i_2^*)+408} = -\frac{1}{-392} \simeq 0{,}002\,551\ :$$

i_1^* è più sensibile a variazioni di a_2, i_2^* ha sensibilità simili (e opposte).

Per esempio, se $a_0 \to -300$, $i_1^* \rightsquigarrow -97{,}503\%$ ($\simeq$) e $i_2^* \rightsquigarrow 32{,}972\%$ ($33{,}403\%$). Analogamente, se $a_2 \to -11$, $i_1^* \rightsquigarrow -97{,}244$ ($\simeq$) e $i_2^* \rightsquigarrow 24{,}745$ ($24{,}744\%$).

Cenno: TIR e decomposizione

Da varie situazioni, è noto che un'operazione con TIR i^* può essere "replicata" da un **portafogli di titoli obbligazionari** con rendimento i^*. La questione può essere vista in piena generalità.

È naturale identificare

$$\begin{array}{c|c|c|c} t_0 & t_1 & \cdots & t_n \\ \hline a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{array} \quad \longrightarrow \quad [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_n] \in \mathbb{R}^{n+1} .$$

L'insieme $\mathscr{S}_n(r)$ dei progetti con TIR r è la soluzione di $\sum_{k=0}^{n} a_k(1+r)^{t_0-t_k} = 0$, quindi un'*iperpiano*. Di conseguenza, ogni progetto con TIR r può essere decomposto rispetto a una qualsiasi **base** di $\mathscr{S}_n(r)$ (basta prendere n vettori indipendenti).

Esempi di basi: TCN o TCC emessi in t_0 con scadenze in $t_1, t_2, \ldots, t_n$; TCN o TCC emessi in $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ con scadenze in t_n; TO emessi in $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ con scadenze in $t_1, t_2, \ldots, t_n$.