Opzioni Americane con Clausole di Accelerazione

Anna Battauz

in collaborazione con
Sara Staffolani

....

1 giugno 2023

Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali, Università di Parma

T.D.5 Ragione e Sentimento

Opzioni Americane

Incontrai Erio Castagnoli nel 2000 e parlammo di opzioni americane,

l'argomento del mio primo articolo e della mia tesi di PhD.

"Mi hanno cambiato la materia sotto il naso: sono un ragioniere e mi tocca insegnare questa roba!", mi disse Erio.

Opzioni Americane

Incontrai Erio Castagnoli nel 2000 e parlammo di opzioni americane, l'argomento del mio primo articolo e della mia tesi di PhD.

Il paper è coautorato con Sara Staffolani, Studentessa al PhD in Finanza alla Bocconi, come già al biennio e al triennio.

Opzioni Americane

Incontrai Erio Castagnoli nel 2000 e parlammo di opzioni americane, l'argomento del mio primo articolo e della mia tesi di PhD.

La foto è opera di Erio,
Laghi di Mantova, 2002.

Opzioni Americane

Si consideri un mercato privo di arbitraggio e completo descritto in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$:

- $\mathcal{F}$ filtrazione
- $\mathbb{Q}$ probabilità neutra al rischio
- Titolo privo di rischio, r tasso di interesse costante
- Opzione Americana: scadenza T e payoff in t pari a $X(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0, T]$.
- Il prezzo attualizzato di non arbitraggio dell'opzione in t è

$$\widetilde{V}(t) = \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}_t \left[e^{-r\tau} X(\tau)\right] = \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}_t \left[\widetilde{X}(\tau)\right] \tag{1}$$

ove τ denota un tempo d'arresto rispetto a $\mathcal{F}$.

Opzioni Call Americane e Warrant

- Payoff in t è $(S(t) - K)^+$
- Se S non paga dividendi è ottimo esercitare in T soltanto
- Se S paga dividendi è ottimo esercitare anticipatamente quando S sia *sufficientemente in the money*
- Prezzo di non arbitraggio attualizzato in t

$$\widetilde{C}(t) = \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}_t \left[e^{-r\tau} (S(\tau) - K)^+ \right] \tag{2}$$

  ove τ denota un tempo d'arresto rispetto a $\mathcal{F}$.
- Warrants: opzioni call su azioni emesse da azienda. Scadenza tipicamente lunga (da 1 a 10 anni).

Clausole di accelerazione dei warrant

- Le clausole di accelerazione servono all'azienda emittente a ridurre la scadenza dei warrant.
- Sono diventate più comuni perchè le Special Purpose Acquisition Companies (SPACs) usano tra gli altri strumenti di finanziamento anche i warrants
- Le clausole di accelerazione accorciano la scadenza del warrant se l'azione sottostante o il suo valore medio per un periodo di tempo specificato eccede una soglia predeterminata
- Le clausole di accelerazione rendono il warrant un derivato Americano con scadenza stocastica

Le clausole di accelerazione

- Esempio: scadenza $T = 5$ o 10 anni e vita residua dopo accelerazione $T' = 1$ mese
- Sia τ_Θ il tempo d'arresto rispetto $\mathcal{F}$ che descrive la data di scadenza dovuta alla clausola di accelerazione.
- L'accelerazione avviene solo una volta
- Finché $\tau_\Theta > t$, la scadenza dell'opzione in t resta T
- Se $\tau_\Theta = t \leq T$, la scadenza dell'opzione in t si riduce a $\Theta(\tau_\Theta) = \min(T' + \tau_\Theta, T)$, con $T' < T$.

Processo di scadenza dell'opzione con accelerazione

La data di scadenza dell'opzione diviene un processo $\Theta = \{\Theta(t)\}_t$ che dipende dalla data di accelerazione:

$$
\begin{aligned}
\Theta(t) &= T & 0 \le t < \min(\tau_\Theta, T) \\
\Theta(t) &= \min(T, T' + \tau_\Theta) & \tau_\Theta \le t < \min(T, T' + \tau_\Theta)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Clausole di accelerazione legate al valor medio dell'azione

- $A(t)$ valore medio azionario (mese precedente a t)
- $\overline{A}$ soglia di accelerazione, $\overline{A} > S(0)$
- Non appena $A(t) \geq \overline{A}$, l'opzione deve essere esercitata entro (al più) un mese

$$\tau_A = \inf\left\{t > 0 : A(t) \geq \overline{A}\right\}$$

Scadenza del warrant con clausola di accelerazione:

$$\Theta_A(t) = \begin{cases} T & \tau_A > t \\ \min\left(\tau_A + \frac{1}{12}, T\right) & \text{se } \tau_A \leq t \end{cases} \quad (4)$$

Opzioni Americane call composte

Opzione Americana con prezzo d'esercizio nullo sull'opzione Americana call (2)
Prezzo attualizzato di non arbitraggio in t è

$$\widetilde{CC}(t) = \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}_t \left[\widetilde{V}(\tau) \right] \tag{5}$$

Lemma

$\widetilde{CC}(t) = \widetilde{V}(t)$

Infatti $\widetilde{CC}(t) \geq \widetilde{V}(t)$. Per le proprietà dell'inviluppo di Snell $\widetilde{CC}(t)$ è la più piccola *supermartingala* maggiore di $\widetilde{V}(t)$. Ma $\widetilde{V}(t)$ è di già una supermartingala, quindi $\widetilde{CC}(t) = \widetilde{V}(t)$.

Opzione Americana accelerata

Dato il processo di scadenza Θ in (3), il valore di non arbitraggio dell'opzione X con clausola di accelerazione Θ è

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_{\Theta}(t) &= \sup_{t \leq \tau \leq \Theta(t)} \mathbb{E}_t \left[\widetilde{X}(\tau) \right] \\ &= \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}_t \left[\widetilde{X}(\tau) \mathbb{I}_{0 \leq \tau < \tau_{\Theta}} + \widetilde{X}(\tau) \mathbb{I}_{\tau_{\Theta} \leq \tau \leq \tau_{\Theta} + T'} \right] \end{aligned} \tag{6}$$

Nota: non coincide con semplice opzione knock-out a τ_{Θ}, perché il payoff non si annulla dopo τ_{Θ}.

Payoff modificato della nuova opzione composta

Dato $\widetilde{V}_{\Theta(\tau_\Theta)}(\tau_\Theta)$ valore attualizzato dell'opzione accelerata a τ_Θ, definiamo

$$\widetilde{X}_\Theta(u) = \widetilde{X}(u)\mathbb{I}_{0\leq u<\tau_\Theta} + \widetilde{V}_{\Theta(\tau_\Theta)}(\tau_\Theta)\mathbb{I}_{\tau_\Theta=u} \quad \text{per } u \in [t, T]$$

Opzione composta:

$$\widetilde{V}_{X_\Theta}(t) = \sup_{t\leq\tau\leq T} \mathbb{E}_t\left[\widetilde{X}_\Theta(\tau)\right] \tag{7}$$

Obiettivo: mostrare che $\widetilde{V}_\Theta$, valore dell'opzione Americana con accelerazione (6) , coincide con quello dell'opzione composta con nuovo payoff X_Θ.

Valutazione dell'opzione composta

Principio di Bellmann discreto in τ_Θ :

$$\widetilde{V}_\Theta(\tau_\Theta) = \sup_{\tau_\Theta \le \tau \le \tau_\Theta + T} \mathbb{E}_t \left[\widetilde{X}(\tau) \right]$$

Si può dimostrare che l'opzione Americana con clausola di accelerazione ha valore pari a

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_\Theta(t) &= \sup_{t \le \tau \le T} \mathbb{E}_t \left[\widetilde{X}(\tau) \mathbb{I}_{0 \le \tau < \tau_\Theta} + \widetilde{X}(\tau) \mathbb{I}_{\tau_\Theta \le \tau \le \tau_\Theta + T'} \right] \\ &= \sup_{t \le \tau \le T} \mathbb{E}_t \left[\widetilde{X}(\tau) \mathbb{I}_{0 \le \tau < \tau_\Theta} + \widetilde{V}_{\Theta(\tau_\Theta)}(\tau_\Theta) \mathbb{I}_{\tau_\Theta = \tau} \right] \end{aligned}$$

ove $\widetilde{V}_{\Theta(u)}$ denota il prezzo (scontato) di un'opzione Americana con payoff X e scadenza $\Theta(\tau_\Theta) = \min(T, T' + \tau_\Theta)$, *nota in* τ_Θ.

Approssimazione analitica

L'opzione composta $\widetilde{V}_{X_\Theta}$ ha valore semplice da calcolare se usiamo per $\widetilde{V}_{\Theta(\tau_\Theta)}$, la call con scadenza ridotta $\Theta\left(\tau_\Theta\right)$,

- formula di approssimazione analitiche
- approssimazioni per difetto quali il valore dell'opzione europea $\widetilde{V}_{eur,\Theta(t)}$

Approssimazione per difetto di $\widetilde{V}_\Theta(t)$

$$\widetilde{V}_{LB}(t) = \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}_t\left[\widetilde{X}_{LB}(\tau)\right]$$

ove

$$\widetilde{X}_{LB}(u) = \widetilde{X}(u)\mathbb{I}_{0 \leq u < \tau_\Theta} + \widetilde{V}_{eur,\Theta(\tau_\Theta)}(\tau_\Theta)\mathbb{I}_{\tau_\Theta = u}$$

e $\widetilde{V}_{eur,\Theta(\tau_\Theta)}(\tau_\Theta)$ è il valore attualizzato di un'opzione europea con scadenza $\Theta\left(\tau_\Theta\right)$ e payoff finale (attualizzato) $\widetilde{X}(\Theta\left(\tau_\Theta\right))$.

Il mercato binomiale

- $t = 0, \Delta t, ..., T$ (es: $\Delta t = 1$ giorno). $M = T/\Delta t$ numero date
- $B(0) = 1$ e $B(t + \Delta t) = B(t)e^{r\Delta t}$
- $S(0) = S_0$,

$$S(t+\Delta t) = \begin{cases} S(t)e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} & \text{with } q = \frac{e^{(r-\delta)\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \\ S(t)e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} & 1-q \end{cases}$$

ove σ è la volatilità e δ il tasso di dividendo di S.

- Clausola di accelerazione:

$$A(t) = A(n\Delta t) = \frac{1}{n+1}\sum_{s \le t} S(s)$$

La clausola di accelerazione presenta 3 casi

L'accelerazione (AC)

1. avviene prima di t, i.e. $\tau_A < t$. In questo caso $X_{LB}(t) = 0$, poiché $V_{eur,\Theta(t)}$ è già stata liquidata.
2. non è mai avvenuta prima di t né a t, i.e. $\tau_A > t$. In questo caso $X_{LB}(t) = (S(t) - K)^+$.
3. avviene in t, i.e. $\tau_A = t$. In questo caso $X_{LB}(t) = V_{eur,\Theta(t)}$, call europea su S con strike K e scadenza $\Theta(t) = \min\left(t + \frac{1}{12}; T\right)$.

Markovianizzazione della clausola (AC) - I

Terna di markovianizzazione $(S(t), A(t), \Upsilon(t))$:

$$\Upsilon(t) = \begin{cases} -1 & \text{se (AC) è avvenuta prima di } t \\ 0 & \text{se (AC) non è avvenuta né prima né in } t \\ 1 & \text{se (AC) avviene per la prima volta in } t \end{cases}$$

Regola per il successore: $(S(t+\Delta t), A(t+\Delta t), \Upsilon(t+\Delta t))$ dato $(S(t), A(t), \Upsilon(t))$ è

$$S(t+\Delta t) = \begin{cases} S(t)e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} & \text{con } q \\ S(t)e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} & 1-q \end{cases}$$

$$A(t+\Delta t) = \frac{tA(t) + S(t+\Delta t)}{t+\Delta t} \tag{8}$$

Markovianizzazione della clausola (AC) - II

Successore di Y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}(t) &= -1 \Rightarrow \mathrm{Y}(t+\Delta t) = -1 \\
\mathrm{Y}(t) &= 0 \Rightarrow \mathrm{Y}(t+\Delta t) = \begin{cases} 0 & \text{se } A(t+\Delta t) < \overline{A} \\ 1 & \text{se } A(t+\Delta t) \geq \overline{A} \end{cases} \\
\mathrm{Y}(t) &= 1 \Rightarrow \mathrm{Y}(t+\Delta t) = -1
\end{aligned} \tag{9}$$

Ricorsione all'indietro:

$$V_{LB}(T) = \begin{cases} (S(T)-K)^+ & \text{se } \Upsilon(T)=0 \text{ o } \Upsilon(T)=1 \\ 0 & \text{se } \Upsilon(t)=-1 \end{cases}$$

e per $t = T-\Delta t, ..., \Delta t, 0$

$$V_{LB}(t) = \max\left\{X_\Theta(t), \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\Delta t}\widetilde{V}_{LB}(t+\Delta t)\right]\right\} \tag{11}$$

ove

$$X_\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \Upsilon(t)=-1 \\ (S(t)-K)^+ & \text{se } \Upsilon(t)=0 \\ V_{eur,\frac{1}{12}}(t) & \text{se } \Upsilon(t)=1 \end{cases}$$

dove $V_{eur,\frac{1}{12}}(t)$ è il prezzo in t di un'opzione call su S con prezzo d'esercizio K e scadenza 30 giorni.

$n = 0$

$S_0 < \overline{A}$

$n = 1$

$$S_0 u^2 \longmapsto (A, \mathrm{Y})(2)$$

$$\nearrow$$

$$S_0 u \longmapsto (A, \mathrm{Y})(1)$$
$$A = \frac{S_0 + S_0 u}{2} \geq \overline{A}$$
$$\mathrm{Y} = 1$$

$$\nearrow \qquad \searrow$$

$$S_0 \longmapsto (A, \mathrm{Y})$$
$$A = S_0$$
$$\mathrm{Y} = 0$$

$$S_0 ud \longmapsto (A, \mathrm{Y})(2)$$

$$\searrow$$

$$S_0 d \longmapsto (A, \mathrm{Y})(1)$$
$$A = \frac{S_0 + S_0 d}{2} < \overline{A}$$
$$\mathrm{Y} = 0$$

$$\nearrow \qquad \searrow$$

$$S_0 d^2 \longmapsto (A, \mathrm{Y})(2)$$

$n = 0$

$S_0 < \overline{A}$

$S_0 \longmapsto (A, \mathrm{Y})$
$A = S_0$
$\mathrm{Y} = 0$

$\nearrow$

$\searrow$

$n = 1$

$S_0 u \longmapsto (A, \mathrm{Y})(1)$
$A \geq \overline{A}$
$\mathrm{Y} = 1$

$S_0 d \longmapsto (A, \mathrm{Y})(1)$
$A < \overline{A}$
$\mathrm{Y} = 0$

$\nearrow$

$\searrow$

$\nearrow$

$\searrow$

$S_0 u^2 \longmapsto (A, \mathrm{Y})(2)$
$\mathrm{Y} = -1$

if $\frac{S_0 + S_0 u + S_0 ud}{3} < \overline{A}$

$S_0 ud \longmapsto (A, \mathrm{Y})(2)$
$\mathrm{Y} = -1, 0$

$S_0 d^2 \longmapsto (A, \mathrm{Y})(2)$
$\mathrm{Y} = 0$

$n = 0$ $\qquad$ $n = 1$

$S_0 u^2 \longmapsto (A, \mathrm{Y})(2)$
$\mathbf{V}(2)$

$S_0 u \longmapsto (A, \mathrm{Y})(1)$
$\mathbf{CV}(1) \quad \mathbf{X}(1)$
$\mathbf{V}(1)$

$S_0 \longmapsto (A, \mathrm{Y})$
$\mathbf{V}(0)$

$S_0 ud \longmapsto (A, \mathrm{Y})(2)$
$\mathbf{V}(2)$

$S_0 d \longmapsto (A, \mathrm{Y})(1)$
$\mathbf{CV}(1) \quad \mathbf{X}(1)$
$\mathbf{V}(1)$

$S_0 d^2 \longmapsto (A, \mathrm{Y})(2)$
$\mathbf{V}(2)$

$t = n\Delta t$ $\qquad$ $t + \Delta t = (n+1)\,\Delta t$

$$Su \longmapsto (A, \mathrm{Y})$$
$$\mathbf{A}(t+\Delta t)$$
$$\mathrm{Y}(t+\Delta t) = -1, 0, 1$$

$\nearrow$

$$S \longmapsto (A, \mathrm{Y})$$
$$\mathbf{A}(t)$$
$$\mathrm{Y}(t) = -1, 0, 1$$

$\searrow$

$$S_0 d \longmapsto (A, \mathrm{Y})$$
$$\mathbf{A}(t+\Delta t)$$
$$\mathrm{Y}(t+\Delta t) = -1, 0, 1$$

$\dim \mathbf{A} = 3$ $\qquad$ $\mathrm{Y} = -1, 0, 1$

$t = n\Delta t$ $\qquad$ $t + \Delta t = (n+1)\,\Delta t$

$Su \longmapsto (A, Y)$

$\mathbf{A}(t+\Delta t) \longmapsto$ $\qquad$ $\mathbf{CV}(t+\Delta t)$ $\mathbf{X}(t+\Delta t$

$Y(t+\Delta t) = -1, 0, 1$ $\qquad$ $\mathbf{V}(t+\Delta t)$

$\nearrow$

$S \longmapsto (A, Y)$

$\mathbf{A}(t)$

$Y(t) = -1, 0, 1$

$\mathbf{CV}(t)$ $\quad$ $\mathbf{X}(t)$

$\mathbf{V}(t)$

$\searrow$

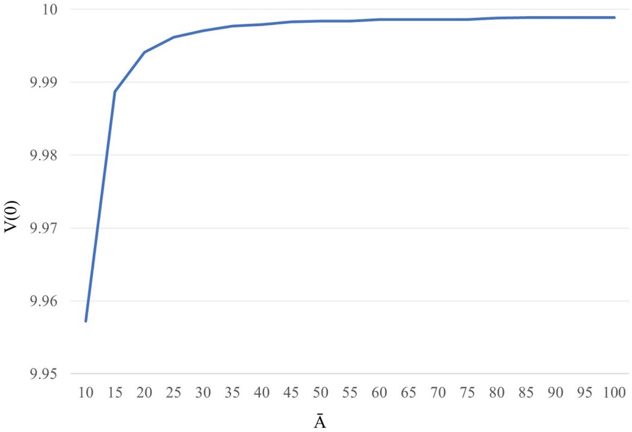
$S_0 d \longmapsto (A, Y)$

$\mathbf{A}(t+\Delta t) \longmapsto$ $\qquad$ $\mathbf{CV}(t+\Delta t)$ $\mathbf{X}(t+\Delta t$

$Y(t+\Delta t) = -1, 0, 1$ $\qquad$ $\mathbf{V}(t+\Delta t)$

Valore del warrant in funzione della soglia di accelerazione

$K = 0.1$, $S_0 = 10$, $\sigma = 0.1$, $T = 1y$, $r = 0.02$, $\delta = 0$, $N = 6m$,
$V_{Amer}(0) = 9.9993$



Frontiera di accelerazione

$$ab(t) = \min\{S(t) : \Upsilon(t) = 1 \text{ per ogni } A(t) \text{ compatibile con } S(t)\}$$

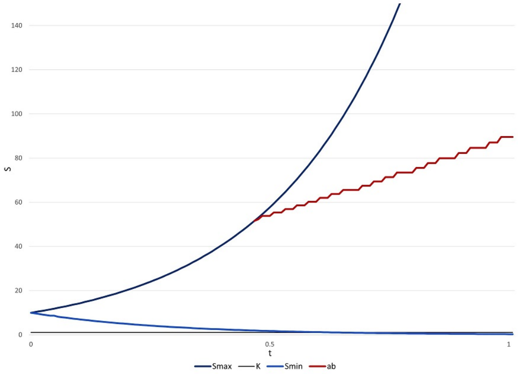


Figura 2. Frontiera di accelerazione, caso $\delta = 0$

Frontiera di esercizio anticipato

Frontiera libera per opzione non ancora accelerata

$$fb\left(t\right)\big|_{\Upsilon(t)=0} = \min\left\{S\left(t\right) : V_{LB}(t, S\left(t\right), A\left(t\right), 0) = \left(S\left(t\right) - K\right)^{+}\right.$$

$$\left.\forall A\left(t\right) \text{ compatibile con } S\left(t\right)\right\}$$

Frontiera di esercizio anticipato

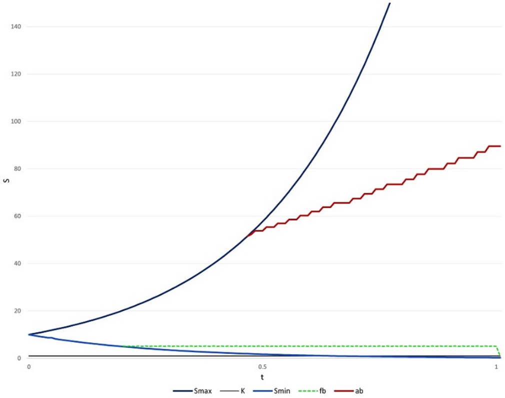


Figura 3. Frontiera di accelerazione e frontiera libera, caso $\delta = 0.002$

Frontiere al variare della soglia di accelerazione

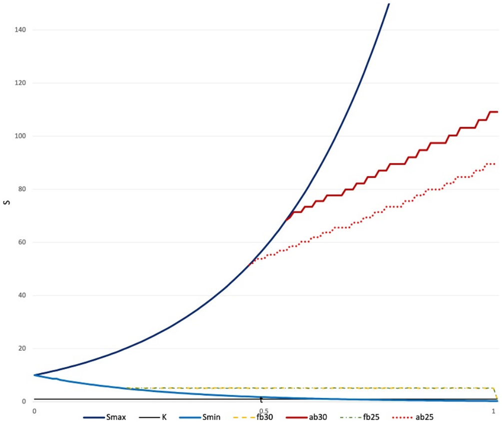


Figura 4. Frontiere per vari $\bar{A}$

Parametri delle figure

Figura 2
$K = 1$, $S_0 = 10$, $\sigma = 0.02$, $T = 1$, $r = 0.01$, $\bar{A} = 25$, $N = 6m$,
$V_{Amer}(0) = 9.91797$

Figura 3
$K = 1$, $S_0 = 10$, $\sigma = 0.02$, $T = 1$, $r = 0.01$, $\bar{A} = 25$, $N = 6m$,
$V_{Amer}(0) = 9$

Figura 4
$K = 1$, $S_0 = 10$, $\sigma = 0.02$, $T = 1$, $r = 0.01$, $\delta = 0.002$, $N = 6m$,
$V_{Amer}(0) = 9$

Conclusioni

- Opzioni americane con clausole di accelerazione
- Scadenza stocastica può essere "trasformata" in un payoff composito pari a quello dell'opzione originale se non accelerato e all'opzione americana stessa con scadenza accelerata (nota) qualora sia accelerata
- Data la scadenza breve dell'opzione accelerata, l'approssimazione dell'opzione accelerata con quella europea è valida
- Algoritmo binomiale su terna markovianizzante è efficiente

Dimostrazione 1

We first observe that $\widetilde{V}_\Theta$ is a supermartingale and that it dominates $\widetilde{X}_\Theta$, the payoff of $\widetilde{V}_{X_\Theta}$. In fact, from the definitions (6) and (7) it follows that

$$\widetilde{V}_\Theta(t) \geq \widetilde{X}(t) = \widetilde{X}(t)\mathbb{I}_{0\leq t<\tau_\Theta} = \widetilde{X}_\Theta(t) \text{ for any } 0 \leq t < \tau_\Theta$$

$$\widetilde{V}_\Theta(\tau_\Theta) = \widetilde{X}_\Theta(\tau_\Theta) \text{ for } t = \tau_\Theta$$

$$\widetilde{V}_\Theta(t) \geq \widetilde{X}(t) \geq 0 = \widetilde{X}_\Theta(t) \text{ for any } \tau_\Theta < t < T$$

Since $\widetilde{V}_\Theta \geq \widetilde{X}_\Theta$, then $\widetilde{V}_\Theta \geq \widetilde{V}_{X_\Theta}$, as $\widetilde{V}_{X_\Theta}$ is the smallest supermartingale dominating $\widetilde{X}_\Theta$. Moreover, for any $\tau \in [t, T]$

$$\sup_{\tau_\Theta\leq\tau\leq\Theta(\tau_\Theta)} \mathbb{E}_t\left[\widetilde{X}(\tau)\mathbb{I}_{\tau_\Theta\leq\tau\leq\Theta(\tau_\Theta)}\right] = \sup_{\tau_\Theta\leq\tau\leq\Theta(\tau_\Theta)} \mathbb{E}_t\left[\mathbb{E}_{\tau_\Theta}\left[\widetilde{X}(\tau)\right]\right]$$

$$\leq \mathbb{E}_t\left[\sup_{\tau_\Theta\leq\tau\leq\Theta(\tau_\Theta)} \mathbb{E}_{\tau_\Theta}\left[\widetilde{X}(\tau)\right]\right] \text{ by Fatou's lemma}$$

Dimostrazione 2

This implies that

$$\widetilde{V}_\Theta(t) = \sup_{t\le\tau\le T} \mathbb{E}_t\left[\widetilde{X}(\tau)\mathbb{I}_{0\le\tau<\tau_\Theta} + \widetilde{X}(\tau)\mathbb{I}_{\tau_\Theta\le\tau\le\Theta(\tau_\Theta)}\right]$$

$$= \sup\left(\sup_{t\le\tau<\tau_\Theta} \mathbb{E}_t\left[\widetilde{X}(\tau)\mathbb{I}_{0\le\tau<\tau_\Theta}\right], \sup_{\tau_\Theta\le\tau\le\Theta(\tau_\Theta)} \mathbb{E}_t\left[\widetilde{X}(\tau)\mathbb{I}_{\tau_\Theta\le\tau\le\Theta(\tau_\Theta)}\right]\right)$$

$$\le \sup\left(\sup_{t\le\tau<\tau_\Theta} \mathbb{E}_t\left[\widetilde{X}(\tau)\mathbb{I}_{0\le\tau<\tau_\Theta}\right], \mathbb{E}_t\left[\widetilde{V}_{X_\Theta}(\tau_\Theta)\right]\mathbb{I}_{\tau=\tau_\Theta}\right)$$

$$= \sup_{t\le\tau<\tau_\Theta} \mathbb{E}_t\left[\widetilde{X}(\tau)\mathbb{I}_{0\le\tau<\tau_\Theta} + \widetilde{V}_{X_\Theta}(\tau_\Theta)\mathbb{I}_{\tau=\tau_\Theta}\right] = \widetilde{V}_{X_\Theta}(t)$$

and our thesis is proved. In all inequalities above we observe that if $\tau_\Theta > T$ then $\tau \le \min(\tau_\Theta, T)$, and the set $\tau_\Theta \le \tau \le \Theta(\tau_\Theta)$ is empty.

Approssimazione numerica

Finally, Table 1 shows the mild entity of the under-estimation produced by algorithm (11) in the evaluation of our warrant with the acceleration clause. Indeed the relative errors in approximating the one-month-maturity American option values via the European one are around 0.02%.

Table 1

$S(0)$	75	80	85	90	95	100
Rel. Err.	0.0227%	0.0228%	0.0229%	0.0229%	0.023%	0.023

Parameters value are $K = 1$, $\sigma = 0.02$, $T = 1y$, $r = 0.01$,

$\delta = 0.002$, $N = 6m$

Bibliografia I

- A. Battauz, M. De Donno, J. Gajda and A. Sbuelz, 2021: Optimal exercise of American put options near maturity: A new economic perspective, Review of Derivatives Research, 25, 23–46, https://doi.org/10.1007/s11147-021-09180-w.
- A. Battauz, M. Pratelli, 2004: Optimal stopping and American options with discrete dividends and exogenous risk, Insurance: Mathematics and Economics, 35, 255–265, https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2004.03.005.
- P. Carr, 1998: Randomization and the American put, Review of Financial Studies, 11(3), 597-626. https://doi.org/10.1093/rfs/11.3.597
- J. Detemple, S. Laminou Abdou and F. Moraux (2020): American step options, European Journal of Operational Research, 282, 363–385, https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.09.009.

Bibliografia II

- J. Hull and A. White, 1993: Efficient procedures for valuing European and American path-dependent options, Journal of Derivatives, 21-31
- S. Mulinacci, M. Pratelli, 1998: Functional convergence of Snell envelopes: application to American option approximations. Finance and Stochastics, 2(3):311–327, https://doi.org/10.1007/s007800050043.
- P. Ritchken, L. Sankarasubramanian and A.M. Vijh, 1993: The valuation of path dependent contracts on the Average, Management Science, 1202-1213
- J.P. Vidal Nunes, J. P. Ruas, and J. C. Dias, 2020: Early exercise boundaries for American-style knock-out options, European Journal of Operational Research, 285 (2), 753-766, https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.02.006.
- K. Yagi, K. Sawaki, 2010: The pricing and optimal strategies of callable warrants, European Journal of Operational Research, 206 (1) 123–130, https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.02.002.