Strategie di investimento ottimali in presenza di una molteplicità di operatori di mercato specializzati

Marina Di Giacinto

Università degli studi di Cassino

Xue Cheng

Peking University

Tai-Ho Wang

Baruch College - CUNY

Giornate teoriche in ricordo di Erio Castagnoli

Seconda edizione - 2 luglio 2020

Investitori istituzionali ed esecuzione ottimale

- Investitore istituzionale con portafogli di grandi dimensioni.
- Elasticità del prezzo rispetto alla liquidazione o all'acquisizione di quote.
- Tener presente della risposta avversa indotta sul prezzo.
- L'esecutore che vuole minimizzare perdite di una liquidazione o acquisizione inefficiente dovrà:
  - minimizzare l'impatto eseguendo l'ordine su un orizzonte di tempo più lungo;
  - limitare l'esposizione al rischio di prezzo;
  - tener presente che le transazioni realizzate possano discostarsi dalle programmate.

Formulazione del problema

- La variabile di controllo è l'intensità di esecuzione degli ordini di mercato.
- L'obiettivo del programma dinamico è la massimizzazione del profitti e perdite per un investitore con preferenze neutre o avverse al rischio.
- L'esecuzione degli ordini non avviene con certezza.
- Il tempo massimo di esecuzione è fissato e viene introdotta una penale sulla posizione residuale.

Principali risultati

1. In un mercato le cui caratteristiche sono fissate esogenamente, impieghiamo una **misura dinamica di rischio**.

   Ciò rende il problema analogo a quello di un agente con preferenze descritte da un'utilità ricorsiva e componente retrograda quadratica.

   Nel lavoro Cheng, Di Giacinto e Wang (2019) si riesce a determinare la strategia ottimale in forma chiusa.

2. Primi passi verso la formulazione di un modello di equilibrio in cui le traiettorie dei prezzi sono determinate endogeneamente.

   L'investitore è neutro al rischio e il mercato è popolato da una molteplicità di operatori specializzati con tempo caratteristico di esecuzione e **costi di giacenza**.

Dinamica della quantità di titolo

Senza perdita di generalità, consideriamo il problema della liquidazione.

Sia $\{B_X(t), (B_S(t)), (B_Q(t))\}_{t\in[0,T]}$ un moto browniano tridimensionale.

- La quantità X detenuta dall'investitore (Cheng, Di Giacinto e Wang, 2017)

$$\begin{cases} dX(t) = -v(t)dt + mdB_X(t), \quad t \in [0, T], \\ X(0) = x_0 > 0, \end{cases}$$

  - T è il termine prefissato del periodo di esecuzione;
  - $v\colon \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ è l'intensità di esecuzione degli ordini (la variabile di controllo);
  - $m > 0$ misura il rischio di mancata esecuzione dell'ordine.

Dinamica del prezzo in Almgren e Chriss (2000)

- Il prezzo osservato S

$$\begin{cases} dS(t) = \gamma dX(t) + \mu dt + \sigma_S dB_S(t), \quad t \in [0, T], \\ S(0) = s_0 > 0, \end{cases}$$

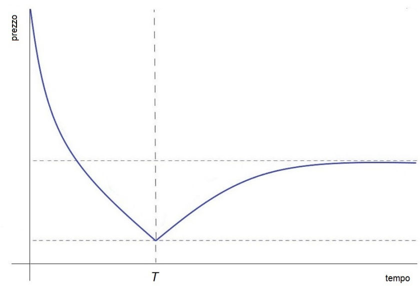
  - $\gamma \geq 0$ quantifica la componente permanente della reazione del prezzo per unità di quantità liquidata.

- Il prezzo di transazione $\widetilde{S}$

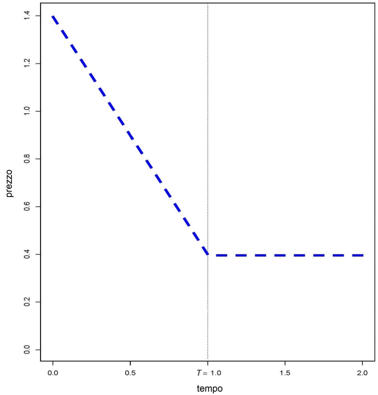
$$\widetilde{S}(t) = S(t) - \eta v(t), \quad t \in [0, T],$$

  - $\eta > 0$ misura la componente transitoria della reazione del prezzo in presenza di un'intensità unitaria di esecuzione.

Risposta del prezzo in un programma di liquidazione



Funzione di risposta ad un ordine di esecuzione osservata (decadimento a potenza).



Funzione di risposta ad un ordine di esecuzione attesa, secondo il modello di Almgren e Chriss.

Operatori di mercato specializzati

- Agenti incaricati di garantire la liquidità del mercato operando sul libro degli acquisti e delle vendite.

- Essi sono soggetti al **rischio di giacenza**, riferibile alla possibilità che variazioni di prezzo inattese possano deprimere il valore dell'invenduto.

  Per descrivere l'effetto sui prezzi:

  - assumiamo che le differenze denaro-lettera dipendono linearmente dalla quantità di invenduto (Avellaneda e Stoikov, 2008, e Guéant, Lehalle e Fernandez-Tapia, 2013, dimostrano che questa strategia è ottimale);

  - consideriamo il limite diffusivo della strategia dinamica di Guéant, Lehalle e Fernandez-Tapia (2013), mostrando che in tale limite essa è approssimata da un processo di Ornstein-Uhlenbeck.

Dinamica del costo di giacenza degli operatori specializzati

- L'evoluzione del costo di giacenza dell'i-esimo operatore di mercato specializzato, $i = 1, \ldots, n$, è descritta da

$$\begin{cases} dQ_i(t) = \theta_i(\bar{q}_i - Q_i(t))dt + \sigma_{Q_i} dB_Q(t), \quad t \in [0, T], \\ Q_i(0) = q_0^i, \end{cases}$$

  - θ_i è la velocità di compravendita dell'i-esimo operatore;
  - $\bar{q}_i$ è la giacenza media a lungo termine dell'i-esimo operatore;
  - presumibilmente $q_0^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Nuova dinamica del prezzo

L'introduzione degli operatori specializzati e l'endogeneizzazione degli effetti dei costi di giacenza modificano la dinamica del prezzi.

- Il prezzo osservato S

$$\begin{cases} dS(t) = -\phi\sum_i^n dQ_i(t) + \gamma dX(t) + \mu dt + \sigma_S dB_S(t), & t \in [0, T], \\ S(0) = s_0 > 0, \end{cases}$$

  - $\phi \geq 0$ è il costo di giacenza per unità di capacità.

- Il prezzo di transazione $\widetilde{S}$ che ne risulta è

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(t) &= S(t) - \eta v(t) \\ &= \underbrace{s_0 + \mu t + \sigma_S B_S(t)}_{\textbf{prezzo di riferimento}} \underbrace{-\eta v(t) + \gamma\left(X(t) - x_0\right)}_{\textbf{selezione avversa}} \underbrace{-\phi \sum_{i=1}^n \left(Q_i(t) - q_0^i\right)}_{\textbf{costo di giacenza}} \end{aligned}$$

Profitti e perdite

- Il profitti e perdite $\Pi^0(t)$ di una strategia di esecuzione in un intervallo di tempo $[0, t]$ è dato da

$$\Pi^0(t) := X(t)\,(S(t) - S(0)) - \int_0^t (\widetilde{S}(u) - S(0))dX(u), \quad t \leq T,$$

  - $X(t)\,(S(t) - S(0))$ è la variazione del prezzo per la quantità di titoli invenduta;
  - $\int_0^t (\widetilde{S}(u) - S(0))dX(u)$ è il costo di esecuzione determinato dalla risposta del prezzo.

- Al profitti e perdite va aggiunta una penalità $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty]$ sulla posizione residuale $x \in \mathbb{R}$ al tempo T pari a

$$f(x) := \beta x^2, \qquad \beta > 0.$$

Il problema di ottimizzazione

Il problema può essere risolto applicando il metodo della programmazione dinamica.

Per ogni $(t, q_1, \dots, q_n, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{n+1}$, il nostro obiettivo è risolvere il seguente

Problema

$$\text{MASSIMIZZARE } J(t, q_1, \dots, q_n, x; v(\cdot)) := \mathbb{E}\left[\Pi^t(T) - f(X(T))\right]$$

$$\text{SU} \quad v(\cdot) \in \mathcal{V}_{\mathrm{a}}[t, T]$$

ove

- $\Pi^t(T) := \Pi^0(T) - \Pi^0(t)$;
- $\mathcal{V}_{\mathrm{a}}[t, T] := \left\{v : [t, T] \times \Omega \to \mathbb{R} \mid v \in \mathcal{H}^2_{\mathbb{F}^t}(t, T; \mathbb{R})\right\}$ è l'insieme delle strategie ammissibili.

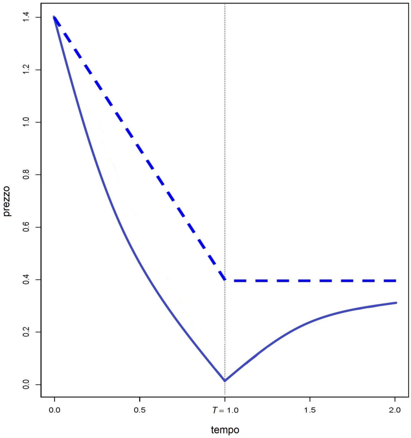
Politica di liquidazione ottimale

L'unica strategia ottimale $v^\star(\cdot) \in \mathcal{V}_{\mathrm{a}}[t, T]$ in forma retroattiva per il punto inziale $(t, q_1, \dots, q_n, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{n+1}$ è

$$\begin{aligned} v^\star(u) \; &:= G\left(u, Q_1(u), \dots, Q_n(u), X(u)\right) \\ &= \frac{\phi}{2\eta} \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\bar{q}_i - Q_i(u)\right)}{T - u + \alpha} \left[\frac{1 - e^{-\theta_i (T-u)}}{\theta_i} + \alpha e^{-\theta_i (T-u)} - (T - u + \alpha) \right] \\ &\quad + \frac{X(u)}{T - u + \alpha} + \frac{\mu}{4\eta} \left(T - u + \alpha - \frac{\alpha^2}{T - u + \alpha} \right), \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}, \ \forall u \in [t, T], \end{aligned}$$

con $\alpha := \dfrac{2\eta}{2\beta - \gamma}$.

Risposta del prezzo in un programma di liquidazione



···· Modello Almgren e Chriss

— Modello modificato con il costo di giacenza

Il caso limite di una molteplicità di operatori specializzati

- L'andamento della curva di decadimento della riposta del prezzo diventa una combinazione di esponenziali, ancora in contraddizione con l'evidenza empirica.
- Impiegando l'approccio di Andersen e Bollerslev (1997), possiamo riprodurre la legge a potenza introducendo un popolazione di operatori specializzati, ciascuno con un proprio tempo di esecuzione $\theta_i \sim \Gamma[\nu]$.
- La risposta del prezzo indotta dai costi di giacenza è la risultante di una sovrapposizione di decadimenti esponenziali.

Calcolo delle giacenze nel limite $n \to +\infty$

1. Sia $q_0^i = 0$ e sia la media a lungo termine della capacità $\overline{q}_i = \frac{\overline{q}}{n}$, ove $\overline{q}$ rappresenta la capacità totale. La giacenza complessiva Q_∞ è

$$Q_\infty(t) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{q}_i - \overline{q}_i e^{-\theta_i t} \right) + \int_0^t e^{-\theta_i (t-u)} dB_Q(u) \right].$$

2. Sia $\mathbb{E}^\Theta$ la media sulla popolazione degli operatori, per effetto della legge dei grandi numeri

$$Q_\infty(t) \overset{\text{LGN}}{=} \mathbb{E}^\Theta \left[Q(t) \right] := \int_0^{+\infty} Q(t) \frac{e^{-\theta} \theta^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} d\theta.$$

Esecuzione ottimale nel limite $n \to +\infty$

3. Congetturiamo che la politica ottimale candidata sia data da

$$v_\infty(t) := \lim_{n\to+\infty} G\left(t, Q_1(t), \ldots, Q_n(t), X(t)\right) = G\left(t, Q_\infty(t), X_\infty(t)\right),$$

con X_∞ unica soluzione all'equazione

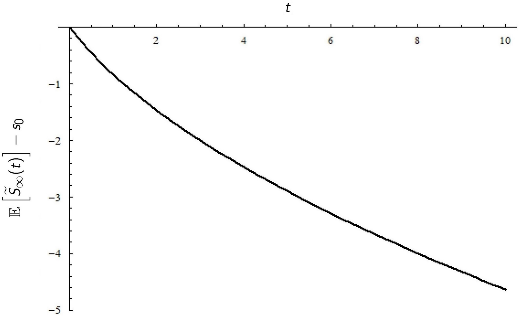
$$\begin{cases} dX_\infty(t) = -G\left(t, Q_\infty(t), X_\infty(t)\right) dt + m dB_X(t), \quad t \in [0, T], \\ X_\infty(0) = x_0 > 0, \end{cases}$$

che descrive la posizione dinamica dell'investitore.

Il decadimento a potenza

4. Sulla base dei precedenti calcoli per $Q_{\underset{\sim}{\infty}}$, v_∞, e X_∞, possiamo determinare l'espressione del prezzo di transazione $\widetilde{S}_\infty$. Otteniamo

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{S}_\infty(t)\right] - s_0 \overset{\frac{t}{T}\to 0}{\asymp} \frac{\phi}{\eta}\left(\frac{\overline{q}}{T+\alpha}\right)\frac{1}{(t+1)^\nu}\left[\frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\nu)}(t+1)-1\right] + \textit{temini dominati.}$$



Risposta del prezzo di transazione con $\nu = \frac{1}{2}$ e $T = 10$

Bibliografia

Almgren, Robert e Neil Chriss (2000). «Optimal execution of portfolio transactions». *Journal of Risk* 3(2), pp. 5–39.

Andersen, Torben G. e Tim Bollerslev (1997). «Heterogeneous Information Arrivals and Return Volatility Dynamics: Uncovering the Long-Run in High Frequency Returns». *Journal of Finance* 52(3), pp. 975–1005.

Avellaneda, Marco e Sasha Stoikov (2008). «High-frequency trading in a limit order book». *Quantitative Finance* 8(3), pp. 217–224.

Cheng, Xue, Marina Di Giacinto e Tai-Ho Wang (2017). «Optimal execution with uncertain order fills in Almgren-Chriss framework». *Quantitative Finance* 17(1), pp. 55–69.

Cheng, Xue, Marina Di Giacinto e Tai-Ho Wang (2019). «Optimal execution with dynamic risk adjustment». *Journal of the Operational Research Society* 70(10), pp. 1662–1677.

Guéant, Olivier, Charles-Albert Lehalle e Joaquin Fernandez-Tapia (2013). «Dealing with the inventory risk: a solution to the market making problem». *Mathematics and Financial Economics* 7(4), pp. 477–507.